

La correspondance de Fermat

De très nombreuses lettres écrites par Fermat nous sont parvenues et sont désormais rassemblées dans des recueils de plusieurs centaines de pages. L'extrait ci-contre est une lettre adressée à Digby dans laquelle Fermat évoque des résultats d'un autre savant, Sir John Wallis.

Question 1

On rappelle que l'écriture de la forme $4\frac{2}{3}$ correspond, en fait, au nombre $4 + \frac{2}{3}$.

Vérifier que les nombres de la ligne (B) sont bien les mêmes que ceux de la ligne (C).

Question 2

Vérifier qu'en multipliant successivement les nombres de la ligne (C), on obtient bien les nombres de départ de la ligne (A).

Question 3

Après avoir lu l'extrait, répondre à la question de Wallis.

Lettre Fermat à Digby, mercredi 15 aout 1657
Remarques sur l'arithmétique des infinis du S. J.
Wallis

[...], après avoir posé une suite de nombres, savoir :

1, 6, 30, 140, 630,

[John Wallis] demande le terme moyen* qui doit être mis entre 1 et 6 [et ainsi de suite pour les nombres proposés].

Je réponds [...] qu'il n'y en peut avoir [un qui soit toujours le même], voici comment :

Les nombres donnés

1, 6, 30, 140, 630 (A)

Sont produits par les suivants en multipliant :

$1, 4\frac{2}{1}, 4\frac{2}{2}, 4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{4},$ (B)

Ou les équivalents :

$1, \frac{6}{1}, \frac{10}{2}, \frac{14}{3}, \frac{18}{4},$ (C)

Œuvres de Fermat, t. II, Correspondance, éd. P. Tannery et C. Henry, Paris, Gauthier-Villars, 1894, p.349.

* Le « terme moyen » entre deux nombres de la même liste est ici le coefficient par lequel il faut multiplier le premier pour trouver le second.

Question 4

En ces nombres, [Fermat parle ici des nombres de la ligne (B)] la seule augmentation du dénominateur de la fraction qui y est jointe [...] fait diminuer les nombres d'autant plus qu'ils s'éloignent du premier terme.

Dans la suite de sa lettre (ci-contre), Fermat explique que, pour les nombres de la liste (B), « l'augmentation du dénominateur de la fraction [...] fait diminuer les nombres ». Compléter les fractions avec des nombres bien choisis pour illustrer cette propriété.

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{\dots} ; \quad \frac{5}{6} > \frac{5}{\dots} ; \quad \frac{47}{20} > \frac{47}{\dots}$$

Notices biographiques



Pierre de Fermat (v.1605 – 1665) est un juriste français passionné par les mathématiques. Il a entretenu une très riche correspondance avec les savants de son époque.

Kenelm Digby (1603 – 1665) est un savant anglais. Il sera membre de la Royal Society à Londres ce qui lui permettra d'être en contact avec de nombreux autres scientifiques.

Bernard Frénicle (1604 – 1674) est un mathématicien français. Il est en relation avec une grande partie des savants de son époque. Il sera membre de l'Académie Royale des Sciences à Paris.

John Wallis (1616 – 1703) est un mathématicien anglais. Il a été, avec plusieurs autres savants avec qui il travaillait, l'un des fondateurs de la Royal Society de Londres



La correspondance de Fermat (suite)

Question 5

Fermat écrit ensuite :

et aux seconds $1, \frac{6}{1}, \frac{10}{2}, \text{etc.}$, [Fermat parle donc ici des nombres de la ligne (C)] qui sont les mêmes en autres termes, les numérateurs des fractions augmentent de 4 et les dénominateurs de l'unité, ce qui fait pareillement diminuer les nombres tant plus la progression avance.

- a) En suivant la règle de construction proposée par Fermat pour les nombres $\frac{6}{1}, \frac{10}{2}, \frac{14}{3}, \frac{18}{4}$, trouver les trois nombres qui suivront dans cette liste.

$$\frac{6}{1}, \frac{10}{2}, \frac{14}{3}, \frac{18}{4}, \frac{\dots}{\dots}, \frac{\dots}{\dots}, \frac{\dots}{\dots}$$

- b) Donner une valeur approchée au centième des sept nombres obtenus dans la question a).
- c) Fermat a-t-il raison lorsqu'il dit que les nombres diminuent au fur et à mesure que l'on prolonge la liste ?
- d) À l'aide du tableur, faire un tableau comme ci-contre afin de calculer les nombres successifs de la liste (C).
- e) À l'aide du tableur, déterminer alors la valeur du 100^e nombre ; puis du 500^e nombre de la liste (C).

	A	B	C
1	numérateur	dénominateur	valeur approchée
2	6	1	
3	10	2	
4	14	3	
5	18	4	
6			
7			
8			

Question 6

Lettre de Digby à Fermat, mercredi 12 décembre 1657

Monsieur,

Depuis que je me suis donné l'honneur de vous écrire une lettre du 5 de ce mois, je reçus celle que vous m'avez fait la faveur de m'écrire le 25 du passé, dont je vous rends très-humbles grâces. Elle me fut rendue comme j'étois à table avec Monsieur Frenicle à qui je la montrai et, y ayant papier et encre sur le buffet, je le priaï de vous écrire quelque petit mot sur ce que vous y disiez sur son sujet ; je vous envoie son écrit.

Œuvres de Fermat, t. II, Correspondance, éd. P. Tannery et C. Henry, Paris, Gauthier-Villars, 1894, p.349.

Le texte ci-contre est une autre lettre, cette fois de Digby à Fermat. Lire cette lettre et, avec le codage proposé, compléter le schéma en prenant en compte aussi la première lettre de l'activité.

Pierre de Fermat

Kenelm Digby

John Wallis

Bernard Frénicle

