La géométrie garante de la rigueur des raisonnements

Dans l'Antiquité et jusqu'à Descartes, la géométrie de la règle et du compas est la science qui assure la justesse des raisonnements.

297

L A

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Problesmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Commẽt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'a-t'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

298 LA GEOMETRIE.

eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

Extrait de l'édition de 1637 de la Géométrie de Descartes.

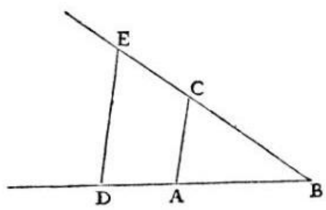
Activité 1

Partie 1

À partir des grandeurs a, b et l'unité que l'on choisira à sa convenance, construire les segments représentants les nombres suivants :

$a+b$; $b-a$; $3a$

La Multiplication.



Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

Partie 2

En s'inspirant de la procédure décrite par Descartes (ci-contre), construire les représentants de nombres :

$a\times b$; $\frac{b}{5}$; $\frac{1}{a}$

Partie 3

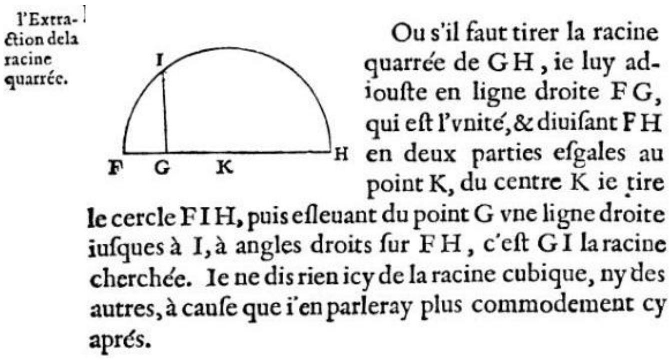
En choisissant judicieusement les longueurs des segments dans un triangle rectangle expliquer comment construire simplement les représentants des nombres :

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$

En s'inspirant de la procédure décrite par Descartes (ci-contre), construire le représentant du nombre $\sqrt{a}$.

Peut-on construire un représentant du nombre suivant ?

$$5+\sqrt{\frac{23-\frac{3}{2}+\sqrt{17}}{\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{2}}}}$$



l'Extraction dela racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adioufte en ligne droite FG, qui eft l'vnité, & diuifant FH en deux parties efgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH, puis efleuant du point G vne ligne droite iufques à I, à angles droits fur FH, c'eft GI la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à caufe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

<u>Commentaires</u> :

Les opérations précédentes permettent de dire que tout rationnel est constructible, mais aussi que la racine carrée d'un rationnel est constructible. Ainsi, on peut, avec de la patience, construire ce nombre.

Il faut attendre les travaux de Pierre-Laurent Wantzel en 1837, qui, grâce aux travaux de Gauss sur les polygones constructibles, peut énoncer le théorème affirmant que les seuls nombres constructibles à la règle et au compas sont ceux pouvant s'écrire uniquement à l'aide des 5 opérations précédentes. Wantzel exprime aussi la condition suffisante :

(*) Si le réel *a* est constructible alors son polynôme minimale est de degré 2^n

Activité 2

1) Par quel nombre doit-on multiplier l'arête d'un carré pour obtenir un carré d'aire double de celle du carré initial ?

2) Peut-on construire géométriquement un carré d'aire double d'un carré donné ?

3) <u>Le cas du cube</u>

La duplication du cube est un problème qui a son origine dans une légende rapportée par Ératosthène. Les Déliens (habitants de l'île de Délos, Grèce), victimes d'une épidémie de peste, demandèrent à l'oracle comment faire cesser cette épidémie. La réponse de l'oracle fut qu'il fallait doubler l'autel consacré à Apollon, autel dont la forme était un cube parfait. Les architectes allèrent trouver Platon pour savoir comment faire, et ce dernier leur répondit que le dieu leur reprochait, par l'intermédiaire de l'oracle, de négliger la géométrie.

Pour simplifier, nous supposerons que l'autel mesurait 1 mètre de côté.

Le volume du cube est …........ .
L'autel demandé par les dieux aura donc un volume de …........ .
Par quel nombre k faut-il donc multiplier l'arête du cube de départ pour obtenir le cube demandé ?
k = ...

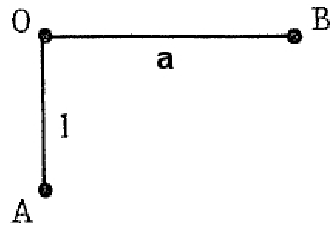
4) Écrire la contraposée de la condition (*) de Wantzel

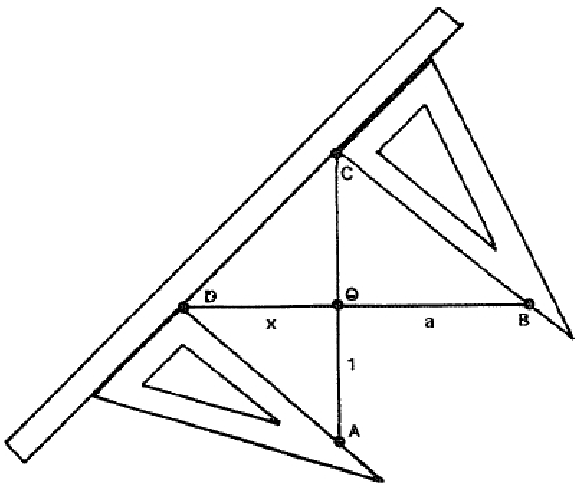
5) Donner l'équation polynomiale la plus simple possible dont k est solution.

6) Conclure quant à la possibilité ou non de construire k à la règle et au compas.

7) Une méthode pour trouver des racines cubiques :

Au IVe siècle, un mathématicien grec propose la méthode suivante :
Soit *a* le nombre dont on cherche la racine cubique.
Tracer un segment [OA] de longueur 1 cm.
Tracer un segment [OB] perpendiculaire à [OA] de longueur a.
Placer les instruments « correctement » et on aura alors $x=\sqrt[3]{a}$





Vérifier cette méthode en cherchant la racine cubique de 8.

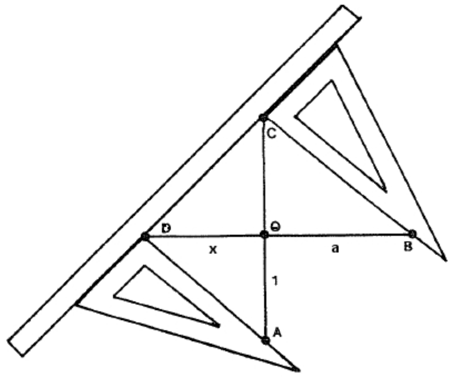
5) Solution de la duplication du cube

Résoudre finalement le problème de la duplication du cube et donner une valeur approchée de k.

$k \simeq$ ... $k^3 \simeq$ ...

Vérifier avec la calculatrice.

Démonstration



1) Coder la figure. Y a-t-il des angles égaux ?

2) Dans le triangle AOD, exprimer tan $\widehat{OAD}$ en fonction de *x*.

3) Dans le triangle COD, exprimer tan $\widehat{CDO}$ en fonction de *x*.
En utilisant la question 2, déduire une expression de OC en fonction de *x*.

4) Dans le triangle COB, exprimer tan $\widehat{BCO}$ en fonction de *a*.
En utilisant la question 2, déduire une expression de OC en fonction de *a* et de *x*.

5) À partir des expressions trouvées dans les questions 3 et 4, démontrer la validité de la méthode.