

La duplication du cube

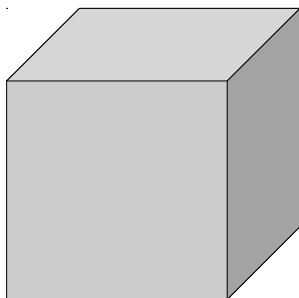
I) Définition

Si $x \times x \times x = x^3 = a$, on dit que x est la de a et on note $x = \sqrt[3]{a}$

II) Duplication du cube

La duplication du cube est un problème qui a son origine dans une légende rapportée par Ératosthène. Les Déliens (habitants de l'île de Délos, Grèce), victimes d'une épidémie de peste, demandèrent à l'oracle comment faire cesser cette épidémie. La réponse de l'oracle fut qu'il fallait doubler l'autel consacré à Apollon, autel dont la forme était un cube parfait. Les architectes allèrent trouver Platon pour savoir comment faire, et ce dernier leur répondit que le dieu leur reprochait, par l'intermédiaire de l'oracle, de négliger la géométrie.

Pour simplifier, nous supposons que l'autel mesurait 1 mètre de côté.



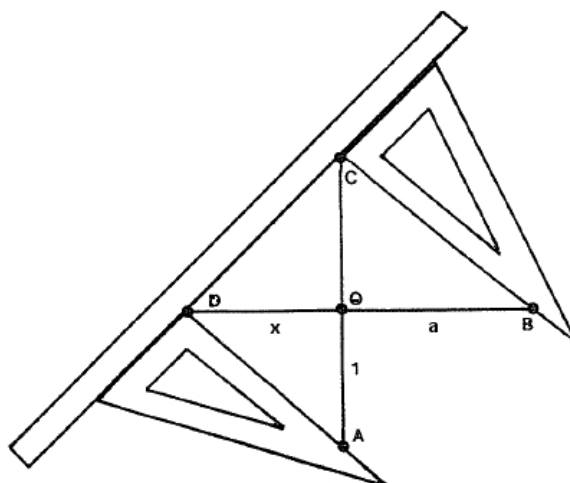
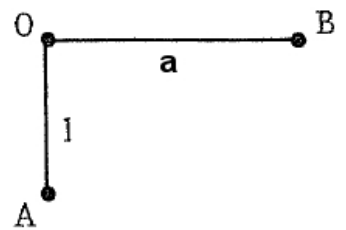
1 m

Le volume du cube est
 L'autel demandé par les dieux aura donc un volume de
 Par quel nombre k faut-il donc multiplier l'arête du cube de départ pour obtenir le cube demandé?
 = =
 On notera $k = \dots\dots\dots$

III) Une méthode pour trouver des racines cubiques

Au IV^e siècle, un mathématicien grec propose la méthode suivante :

- Soit a le nombre dont on cherche la racine cubique.
- Tracer un segment $[OA]$ de longueur 1 cm.
- Tracer un segment $[OB]$ perpendiculaire à $[OA]$ de longueur a .
- Placer les instruments « correctement » et on aura alors $x = \sqrt[3]{a}$.



Vérifier cette méthode en cherchant la racine cubique de 8.

IV) Solution de la duplication du cube

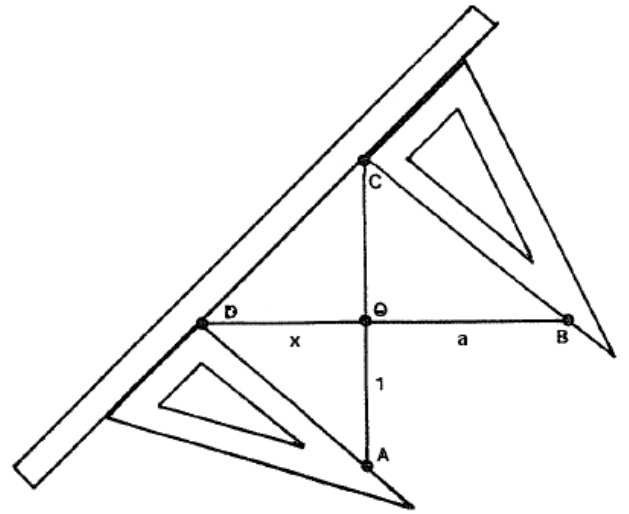
Résoudre finalement le problème de la duplication du cube et donner une valeur approchée de k .

$$k \simeq \dots \quad k^3 \simeq \dots$$

Vérifier avec la calculatrice.

V) Démonstration

1) Coder la figure. Y a-t-il des angles égaux ?



2) Dans le triangle AOD, exprimer \widehat{OAD} en fonction de x .

3) Dans le triangle COD, exprimer \widehat{CDO} en fonction de x .

En utilisant la question 2, déduire une expression de OC en fonction de x .

4) Dans le triangle COB, exprimer \widehat{BCO} en fonction de a .

En utilisant la question 2, déduire une expression de OC en fonction de a et de x .

5) À partir des expressions trouvées dans les questions 3 et 4, démontrer la validité de la méthode.